(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

9. 1. Mantık

9. 1. 1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

Terimler ve Kavramlar : Önerme, bileşik önerme, önermenin değili, her, bazı, ve, veya, ya da bağlaçları, De Morgan kuralları, koşullu önerme, iki yönlü koşullu önerme (veya gerek ve yeter şart), açık önerme.

Sembol ve Gösterimler : p , p ' (veya ~ p) , $\equiv$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\veebar$, $\exists$, $\forall$

9. 1. 1. 1. Önermeyi, önermenin doğruluk değerini, iki önermenin denkliğini ve önermenin değilini açıklar.

9. 1. 1. 2. Bileşik önermeyi açıklar. " ve, veya, ya da " bağlaçları ile kurulan bileşik önermelerin özelliklerini ve De Morgan kurallarını doğruluk tablosu kullanarak gösterir.

1. ÜNİTE : MANTIK

Mantık doğru düşünme bilimidir. Doğru sonuca mantık kuralları ile ulaşılabilinir. Matematiğin amaçlarından biri doğru ve sistemli düşünebilmeyi kazandırmaktır.

Önerme – Bileşik Önermeler

Tanım : **(Önerme) Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere " önerme " adı verilir. Önermeler çoğunlukla p , q , r , s v.b. harflerle gösterilir.**

*** **Bir önerme; doğru hüküm bildiriyorsa önermenin doğruluk değeri 1 , yanlış hüküm bildiriyorsa önermenin doğruluk değeri 0 olarak gösterilir.**

(Bir p önermesinin doğruluk değeri; önerme doğru ise p ≡ 1 , önerme yanlış ise p ≡ 0 olarak belirtilir.)

Örnek : **Aşağıdaki ifadelerden hangileri önerme, hangileri önerme değildir ? Tabloda işaretleyip (X işareti koyunuz), önerme olanların doğruluk değerini tabloya yazınız.**

İFADE	Önermedir	Önerme Değildir	Doğruluk Değeri
Türkiye'nin en büyük gölü Van Gölü'dür.			
Havalar soğumaya başladı.			
Rakamlar 9 tanedir.			
3 en küçük tek asal sayıdır.			
Tüm çift sayılar 4 ile tam bölünür.			
En sevilen ders matematik'tir.			

Soru : **Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerinin toplamını bulunuz.**

p : " Negatif bir tam sayının tüm kuvvetleri yine negatiftir. " ( )

q : " Tek basamaklı asal sayıların toplamı 17 'dir. " ( )

r : " Reel sayılar kümesi en kapsamlı sayı kümesidir. " ( )

s : " 5 elemanlı kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı 25 'tir. " ( )

t : " Sayıların sıfıra bölümü tanımsızdır. " ( )

Tanım : (Doğruluk Tablosu)

Önermelerin bütün doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya " doğruluk tablosu " adı verilir.

1) Bir p önermesinin doğruluk değeri ya 0 (yanlış) ya da 1 (doğru) olabilir.

p
1
0

2) İki p ve q önermesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

	p	q
p ve q önermeleri doğrudur →	1	1
p doğru ama q yanlış önermedir →	1	0
p yanlış ama q doğru önermedir →	0	1
Her ikisi de yanlış önermedir →	0	0

3) **Herhangi üç p , q ve r önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

p	q	r

Not : **n tane farklı önermenin doğruluk değerleri için 2^n tane farklı durum vardır.**

Tanım : **Doğruluk değerleri aynı olan önermelere " denk önermeler " adı verilir.**

p ve q denk önermeler ise bu durum $p \equiv q$ olarak gösterilir.

Soru : **Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulup, denk önermeleri belirleyiniz.**

p : " 54627062814 sayısı 3 ile tam bölünür. "

q : " İki basamaklı en büyük negatif tam sayı – 99 'dur. "

r : " 0 en küçük sayma sayısıdır. "

s : " Eşkenar üçgende her bir iç köşe açısının ölçüsü 60° 'dir. "

Tanım : **Bir önermenin hükmünün değiştirilmesi sonucu ile elde edilen önermeye " önermenin olumsuzu (değili) " adı verilir. Bir p önermesinin değili p' ile gösterilir.**

p	p'	(p')'
1	0	1
0	1	0

Tablodan da görüleceği üzere (p')' ≡ p olur. Yani bir önermenin değilininin değili önermenin kendisine denk olur.

Soru : **Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerini bulup, değerleri tabloya yazınız.**

p : " $5 + 2 . (-3) - (-2)^3 = 7$ 'dir. "

q : " En büyük rakamları faklı üç basamaklı çift sayının 6 fazlası 870 'tir. "

p	p'	q	q'

Tanım : (Bileşik Önerme)

İki ya da daha fazla önermenin birbirine " ve " , " veya " , " ya da " , " ise " ve " ancak ve ancak " bağlaçları ile birbirine bağlanması ile elde edilen önermeye " bileşik önerme " adı verilir.

1) Ve Bağlacı (∧)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık ve bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf 'a :

(Olay)	(Sonuç)
• Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır.	İsteği gerçekleşir.
• Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır.	İsteği gerçekleşmez.
• Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır.	İsteği gerçekleşmez.
• Her ikisini de almamıştır.	İsteği gerçekleşmez.

*** **Ve (∧) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.**

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Not : **Ve bağlacı ile bağlanmış önermelerin oluşturduğu bileşik önerme; iki önerme de doğru iken doğru, diğer durumlarda ise yanlıştır.**

Soru : **(1 ∧ 0)' ∧ 0' ≡ ?**

Soru : **p : “ $\sqrt{-25} = -5$ ’tir. ” ve q : “ En büyük negatif tam sayı -1 ’dir. ” önermeleri için $p \wedge q' \equiv$?**

2) Veya Bağlacı (∨)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık veya bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf 'a :

- **Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Her ikisini de almamıştır.** — **İsteği gerçekleşmez.**

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*** **Veya (∨) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu yandaki gibidir. (Veya bağlacında hem tek önerme hem de iki önerme şartı sağlayabilir.)**

Not : **Veya bağlacı ile bağlanmış önermelerin oluşturduğu bileşik önerme; bileşenlerden biri bile doğru iken doğru, ikisi de yanlış iken yanlıştır.**

Soru : ***A)*** **(0 ∧ 1) ∨ (1 ∧ 0)' ≡ ?**

B) **[1' ∨ (0 ∨ 1)] ∧ 1 ≡ ?**

Soru : **[(1 ' ∨ 0) ' ∧ 1] ∨ (1 ∧ 0) ≡ ?**

Soru : **p : “ 6 < 7 – (– 3) ” ve q : “ Asal sayıların hepsi çift sayıdır. ” önermeleri için p ' ∨ q ≡ ?**

Soru : **p : “ Tek sayıların çift kuvvetleri yine tek sayıdır. ”,**
q : “ En küçük çift doğal sayı 2 ’dir. ” ve r : “ 3x – 5 = 13 ise x = 6 ’dır. ” önermeleri için (r ∧ p)' ∨ q ≡ ?

Örnek : **$p \wedge q' \equiv 1$ ve $r \vee q \equiv 1$ ise $(p \vee r)' \vee q \equiv ?$**

(Verilen bileşik önermeler kullanılarak önermelerin doğruluk değerleri bulunur.)

$p \wedge q' \equiv 1$	$r \vee q \equiv 1$	$(p \vee r)' \vee q \equiv ?$

Soru : **$(p \wedge q') \wedge (q \vee r) \equiv 1$ ise p , q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.**

$$(p \wedge q') \wedge (q \vee r) \equiv 1$$

Soru : **$(r \vee q') \vee (p \wedge q)' \equiv 0$ ise p , q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulup, $r' \wedge (p \vee q)$ bileşik önermesinin sonucunu elde ediniz.**

$$(r \vee q') \vee (p \wedge q)' \equiv 0$$

Örnek : **(p ∨ q) ∧ q ' bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

p	q	q '	p ∨ q	(p ∨ q) ∧ q '

Not : **Bileşik önermelerde tabloya yerleşim yaparken; önce tekli önermeler, sonra ikili bileşke önermeleri, en son da üçlü bileşke önermeleri yerleştirilir.**

Soru : **p ∨ (q ∧ p ') bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

Soru : **(p ∧ r) ∨ (q ∧ p) bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

Ve İle Veya Bağlacı İle Bağlanan Bileşik Önermelerin Özellikleri

***1) Tek Kuvvet Özelliği : Her p önermesi için, $p \vee p \equiv p$ ve $p \wedge p \equiv p$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

*2) Değişme Özelliği : Her p ve q önersi için, $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

*3) Dağılma Özelliği : Her p , q ve r önersi için,

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ve

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

*4) Birleşme Özelliği : Her p , q ve r önersi için,

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ve

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

***5) Özel Durumlar :

p ∨ 1 ≡ 1 **1 ∨ 1 ≡ 1** **0 ∨ 1 ≡ 1**	**p ∨ 0 ≡ p** **1 ∨ 0 ≡ 1** **0 ∨ 0 ≡ 0**	**p ∨ p' ≡ 1** **1 ∨ 0 ≡ 1** **0 ∨ 1 ≡ 1**
p ∧ 1 ≡ p **1 ∧ 1 ≡ 1** **0 ∧ 1 ≡ 0**	**p ∧ 0 ≡ 0** **1 ∧ 0 ≡ 0** **0 ∧ 0 ≡ 0**	**p ∧ p' ≡ 0** **1 ∧ 0 ≡ 0** **0 ∧ 1 ≡ 0**

Sonuçları deneme yanılma metodu ile de bulabilirsiniz.

Örnek : $p \wedge (q \wedge p') \equiv ?$

Soru : $(p \vee q) \vee q' \equiv ?$

Soru : $p \wedge (p' \vee q) \equiv ?$

Soru : $p \vee (p' \wedge q) \equiv ?$

***6) De Morgan Özelliği : Her p ve q önersi için, $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ve $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ denkliği sağlanır. Birinin sağlamasını aşağıdaki tabloda gösterelim.

p	q	p '	q '	p ∨ q	(p ∨ q)'	p ' ∧ q '

Totoloji – Çelişki

Bir bileşik önerme; kendisini oluşturan önermelerin her değeri için doğru oluyorsa bu bileşik önermeye " totoloji " , daima yanlış oluyorsa bu bileşik önermeye de " çelişki " adı verilir.

Örneğin ; $p \vee p' \equiv 1$ bileşik önermesi totoloji, $p \wedge p' \equiv 0$ bileşik önermesi ise çelişkidir.

Soru : **p ∨ (p' ∨ q') ≡ ?**

Soru : **p ∧ (p ∨ q)' ≡ ?** **(De Morgan kuralı uygulanır.)**

Soru : $(p' \wedge q)' \vee q \equiv ?$

Soru : $[p \wedge (p \vee q')']' \equiv ?$

Örnek : **(p ' ∧ q)' ∧ (p ∨ q) ≡ ?**

(De Morgan kuralı uygulanır. Parantezlere bakıldığında dağılma özelliği tersine çevrilir.)

Soru : **(p ∧ q) ∨ (p ∨ q ')' ≡ ?**

3) Ya da Bağlacı (⊻)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık ya da bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf 'a :

- **Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır.** **İsteği gerçekleşmez.**
- **Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır.** **İsteği gerçekleşir.**
- **Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır.** **İsteği gerçekleşir.**
- **Her ikisini de almamıştır.** **İsteği gerçekleşmez.**

p	q	p ⊻ q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*** **Ya da (⊻) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu yandaki gibidir. (Ya da bağlacında sadece birinin sağlanması gerekir.)**

Soru : *A)* $(1 \veebar 0)' \veebar (0' \veebar 0) \equiv ?$

B) $[(0 \veebar 1') \wedge (1 \veebar 0)']' \equiv ?$

Soru : A) $p \vee q' \equiv 0$ ve $p' \veebar r \equiv 1$ ise $(p \veebar q) \wedge r' \equiv ?$

B) $p' \wedge q \equiv 1$ ve $q' \veebar r \equiv 0$ ise $(p \veebar r) \vee q \equiv ?$

Soru : **A) p ⊻ p ≡ ?** **B) p ⊻ 1 ≡ ?**

C) p ⊻ 0 ≡ ? **D) p ⊻ p' ≡ ?**

(İstenirse tablodan da işlemlerin sonucu bulunabilir.)

Not : **Ya da bağlacında da değişme ve birleşme özelliği vardır.**

Soru : **Aşağıdaki önermelerde, boş bırakılan yerlere " veya " ile " ya da " bağlaçlarından uygun olanını yerleştiriniz. Sebebini açıklayınız.**

A) **5 tek sayıdır . . . çift sayıdır.**

B) **2 asal sayıdır . . . çift sayıdır.**

C) **2^5 üslü sayıdır . . . sonucu iki basamaklıdır.**

D) **Ali, Temel Lise'de . . . Anadolu Lisesi'nde okuyacaktır.**