(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

9. 3. 3. Üslü İfadeler ve Denklemler

Terimler ve Kavramlar : Köklü ifade, rasyonel kuvvet

Sembol ve Gösterimler : $\sqrt[n]{x^m}$, $x^{\frac{m}{n}}$

9. 3. 3. 2. Köklü ifadeleri içeren denklemleri çözer.

A) Köklü ifadelerin özellikleri üzerinde durulur.

B) $x \in \mathbb{R}^+$ ve $m , n \in \mathbb{Z}^+$ için $n > 1$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ olduğu vurgulanarak köklü ifadeler ve üslü ifadeler arasındaki ilişkiler üzerinde durulur.

C) En çok iki terimli köklü ifadelerin eşleniklerine yer verilir.

Ç) Köklü ifadelerde sonsuza giden iç içe köklerle yapılan işlemlere yer verilmez.

Köklü İfadeler

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 2$ (n tam sayı) olsun. $\sqrt[n]{a}$ terimine "köklü ifade" adı verilir.

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ ifadesi a'nın karekökünü,

$\sqrt[3]{a}$ ifadesi a'nın küpkökünü,

$\sqrt[4]{a}$ ifadesi a'nın 4. dereceden kökünü gösterir.

Kural 1: $\mathcal{A}$) $\sqrt[2k]{a}$ ifadesinde kökün derecesi çift olduğundan $a \geq 0$ olmalıdır.

$\sqrt{25} = 5$ tanımlıdır. Ama $\sqrt{-4}$ tanımlı değildir.

$\mathcal{B}$) $\sqrt[2k+1]{a}$ ifadesinde kökün derecesi tek olduğundan $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır. Yani her reel sayı için köklü ifade tanımlıdır.

$\sqrt[3]{8} = 2$ ve $\sqrt[3]{-1} = -1$ tanımlıdır.

Örnek : $\sqrt[8]{2x-4}$ **ifadesi tanımlı ise x 'in çözüm kümesini bulalım.**

Soru : $\sqrt[6]{15-3x}$ **ifadesi tanımlı ise x yerine gelebilecek en büyük iki tam sayının çarpımını bulunuz.**

Soru : $\sqrt[15]{4x + 16}$ **ifadesi tanımlı ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\sqrt[m-2]{32}$ **ifadesi karekök olup,** $\sqrt[4]{n - 6}$ **ifadesi tanımlı ise n'nin en küçük değeri için m + n = ?**

Soru : $\sqrt{3x-3}$ **ve** $\sqrt[4]{10-2x}$ **ifadeleri tanımlı ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Kural 2: (Kökten Kurtarma)

$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ ve $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ olarak alınır.

(Kökün derecesi çift ise, kökü kaldırırken kökün iç kısmının mutlak değeri alınır. Kökün derecesi tek ise kökü kaldırırken iç kısım aynen alınır.)

$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$ v. b.

Örnek : $x < 0$ ve $y > 0$ olsun. $\sqrt{x^2} - \sqrt[3]{y^3} + x - y = ?$

Soru : $x > 5$ ise $\sqrt{(x-5)^2} + \sqrt[3]{(x-11)^3} = ?$

Soru : $2 < x < 10$ ise $\sqrt{(x-15)^2} - \sqrt[4]{(10-x)^4} = ?$

Soru : $x < -3$ ise $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = ?$

(**Hatırlatma :** $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ idi.)

Örnek : $\sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt[4]{16} + \sqrt{(-6)^2} = ?$

Soru : $\sqrt[5]{-1} + \sqrt[3]{8} - \sqrt{121} + \sqrt[4]{81} = ?$

Soru : $\sqrt[3]{6 + \sqrt{9 - \sqrt{25}}} = ?$

Soru : $\sqrt{35 + \sqrt[5]{5 - \sqrt[3]{64}}} = ?$

Soru : $\sqrt[4]{18 + \sqrt[3]{-13 + \sqrt{28 + \sqrt[3]{-27}}}} = ?$

Soru : $\sqrt[3]{(1/27)^{-1}} \cdot \left(\sqrt[4]{16}\right)^{-1} = ?$

Soru : $\sqrt[4]{0,0256} \cdot \sqrt[3]{(0,008)^{-1}} = ?$

Kural 3: $\sqrt[n]{x^{m}} = x^{\frac{m}{n}}$ **olarak alınır.**

Örnek : $\sqrt[7]{a^{42}} \cdot a = ?$

Soru : $\sqrt[5]{x^{30}} \cdot \sqrt[3]{x^{12}} = ?$

Örnek : $\sqrt[3]{a^5} = ?$ **(Kural uygulandığında sadeleşme olmuyorsa, kökün içindeki üslü ifadenin kökten kurtulabilecek kısmı ayrı tutularak düzenleme yapılır.)**

Soru : $\sqrt[7]{m^{15}} = ?$

Soru : $\left(\sqrt[5]{x^{2}} \right)^{6} = ?$ (***Not :*** $\left(\sqrt[m]{x^{n}} \right)^{p} = \sqrt[m]{x^{n \cdot p}}$

olarak alınabilir.)

Soru : $\left(\sqrt[4]{25} \right)^{3} = ?$

Kural 4: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}} = \sqrt[m.n.p]{x}$

olarak alınır.

Örnek : $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = ?$

Soru : $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{64}}} = ?$

Soru : $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}} = ?$

Örnek : $\sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt{a}} = ?$ **(Soldaki terim sağdaki kökün içine alınır. Sorunun çözümü kural 3 'ten de yapılabilir.)**

Soru : $\sqrt{2 \cdot \sqrt[5]{2}} = ?$

Soru : $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a}} = ?$

Soru : $\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{5}}} = ?$

Soru : $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3^2 \cdot \sqrt[5]{3}}} = ?$

Kural 5: *A)* $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{x \cdot y}$

B) $\dfrac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[m]{\dfrac{x}{y}}$ **olarak alınabilir.**

Yani ; çarpma ve bölme işleminde köklerin derecesi aynı ise işlemi tek kök altında yazabiliriz.

Örnek : $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = ?$

Soru : $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{15}{8}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = ?$

Soru : $\frac{\sqrt{40} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{80}} = ?$

Soru : $\dfrac{\sqrt{0{,}03}}{\sqrt{0{,}27}} \cdot \sqrt{1{,}44} = ?$

Soru : $\dfrac{\sqrt[3]{54 \cdot a^6 \cdot b^5}}{\sqrt[3]{2 \cdot b^2 \cdot a^3}} = ?$

Soru :

$$\frac{\sqrt[4]{0{,}0081}}{\sqrt[4]{0{,}0016}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = ?$$

Soru : $\sqrt[3]{0,005} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{10^{6}} = ?$

Kural 6: A)

$$\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[m \cdot n]{x^n} \cdot \sqrt[n \cdot m]{y^m} = \sqrt[m \cdot n]{x^n \cdot y^m}$$

B) $$\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \frac{\sqrt[m \cdot n]{x^n}}{\sqrt[n \cdot m]{y^m}} = \sqrt[m \cdot n]{\frac{x^n}{y^m}}$$ **olarak alınabilir.**

Yani ; çarpma ve bölme işleminde köklerin derecesi farklı ise, köklerin derecesi eşitlenir. Sonra işlemi tek kök altında yazabiliriz.

Örnek : $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = ?$

Soru : $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x} = ?$

Soru : $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} = ?$

Soru : $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^2}} = ?$

Soru : $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5} = ?$

Soru : $\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = ?$

Soru : $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = ?$

Kural 7: **(Köklerle Toplama ve Çıkarma İşlemi)**

$$a \cdot \sqrt[m]{x} + b \cdot \sqrt[m]{x} - c \cdot \sqrt[m]{x} = (a + b - c) \cdot \sqrt[m]{x}$$

olarak alınır. Yani köklerin derecesi aynı ise, köklü ifadelerin sadece katsayıları toplanır ve çıkartılır.

Örnekler : *1)* $3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = ?$

2) $\sqrt{12} - \sqrt{27} = ?$

Soru : $\sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{72} = ?$

Soru : $\sqrt{75} - 2\sqrt{48} + \sqrt{27} = ?$

Soru : $\sqrt{216} - 3\sqrt{24} + \sqrt{150} = ?$

Soru : $\sqrt{\frac{27}{16}} + \sqrt{\frac{12}{25}} = ?$

Soru : $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} = ?$

Soru : $3\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{1250} = ?$

Kural 8: **(Sıralama)** $\sqrt[m]{x}$, $\sqrt[m]{y}$, $\sqrt[m]{z}$, . . .

ifadelerinde kök dereceleri aynı ise, köklerin iç kısmı karşılaştırılarak sıralama yapılabilir. Kök dereceleri aynı değil ise, dereceler eşitlenerek sıralama yapılır.

Örnek : $x = 3\sqrt{2}$ **ile** $y = 2\sqrt{3}$ **sayılarını karşılaştıralım.**

Soru : $x = 3\sqrt{5}$, $y = 5\sqrt{2}$ ve $z = 4\sqrt{3}$ sayılarını karşılaştırınız.

Soru : $x = 2\sqrt[3]{7}$ **ile** $y = 3\sqrt[3]{2}$ **sayılarını karşılaştırınız.**

Soru : $x = \sqrt[3]{2}$ **ile** $y = \sqrt[4]{3}$ **sayılarını karşılaştırınız.**

(Önce köklerin dereceleri eşitlenir.)

Soru : $x = \sqrt[5]{7}$ **ile** $y = \sqrt{2}$ **sayılarını karşılaştırınız.**

Kural 9: **(Eşlenik) Paydası köklü olan ifadelerde; pay ile payda, paydanın eşleniği ile çarpılır. Böylece ifadenin paydası kökten kurtarılır.**

A) **$\sqrt{a}$ 'nın eşleniği $\sqrt{a}$ 'dır.**

B) **$a + \sqrt{b}$ 'nin eşleniği $a - \sqrt{b}$ 'dir.**

C) **$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 'nin eşleniği $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 'dir.**

*** **B ve C 'de eşlenik alınırken, küçük olan ifadenin ters işaretlisi alınır.**

Örnekler : *1)* $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = ?$

2) $\dfrac{5}{2-\sqrt{3}} = ?$ (**Hatırlatma :** $(x-y).(x+y) = x^2 - y^2$ idi.)

Soru : $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}} = ?$

Soru : $\dfrac{12}{\sqrt{7} - 2} = ?$

Soru : $\dfrac{7}{2\sqrt{2}-1} = ?$

Soru : $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} - \dfrac{12}{\sqrt{3}} = ?$

Soru : $\dfrac{15}{\sqrt{5}} + \dfrac{12}{3 + \sqrt{5}} = ?$

Soru : $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = ?$

Soru : $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+1} = ?$

Soru : $\dfrac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = ?$

Örnek : $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$ **kesrinin paydasını kökten kurtaralım. (Pay ile payda uygun köklü ifade ile çarpılarak, payda kökten kurtarılır.)**

Soru : $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ **kesrinin paydasını kökten kurtarınız.**

Soru : $\dfrac{18}{\sqrt[5]{8}}$ **kesrinin paydasını kökten kurtarınız.**

Kural 10: (Köklü Denklemler)

Köklü denklemlerin bulunduğu eşitliklerde, köklü ifade yalnız bırakılarak eşitliğin uygun kuvveti alınır. Kök ortadan kaldırıldıktan sonra denklem çözülür.

Not : **Kökün derecesi <u>çift</u> ise bulunan çözümün denklemi <u>sağlayıp sağlamadığı</u> kontrol edilir.**

Örnek : $\sqrt{-2+x} = 5$ ise $x = ?$

Soru : $\sqrt{2x-3} = 11$ ise $x = ?$

Soru : $\sqrt{x - 4} = -10$ ise $x = ?$

Soru : $2 \cdot \sqrt{x - 3} - 7 = 1$ ise $x = ?$

Soru : $6 + 3 . \sqrt{4 - x} = 15$ ise $x = ?$

Soru : $\sqrt[3]{5 - 2x} = -3$ ise $x = ?$

Soru : $4 = \sqrt[3]{3x - 11}$ ise $x = ?$

Örnek : $\sqrt{x^2 - 3} = x - 3$ ise $x = ?$

Soru : $\sqrt{x^2 + 24} = x + 4$ ise $x = ?$

Örnek : $8^{2} = \sqrt{2^{x+2}}$ ise $x = ?$

Soru : $\sqrt[3]{2^{4-x}} = 4^5$ ise $x = ?$

Soru : $\sqrt{2^{x+2}} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$ **ise x = ?**

Soru : $\sqrt[3]{25^{2x+\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{125^{x-1}}$ ise $x = ?$

Kural 11: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{a \pm 2\sqrt{m}} = \sqrt{p} \pm \sqrt{q}$

olarak alınır.

$a = p + q$ $\qquad$ $m = p \cdot q$

şartını sağlamalıdır.

*** **Sonuç kısmında büyük kökten küçük kök çıkartılır.**

Örnek : $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = ?$

Soru : $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = ?$

Soru : $\sqrt{\ 7\ +\ \sqrt{\ 48\ }\ }$ = ? **(Kuralı sağlar hale getirilir.)**

Soru : $\sqrt{6 + \sqrt{20}} = ?$

Soru : $\sqrt{4 - \sqrt{7}} = ?$

Soru : $\sqrt{6 + \sqrt{11}} = ?$

Soru : $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} = ?$

Soru : $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = ?$

Soru : $\sqrt{14 + 8\sqrt{3}} = ?$