(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

9. 2. 2. Kümelerde İşlemler

Terimler ve Kavramlar : Tümleme, fark , De Morgan kuralları,

Sembol ve Gösterimler : ∪ , ∩ , A' , A – B (veya A / B)

9. 2. 2. 1. Kümelerde fark, tümleme işlemleri yardımıyla problemler çözer.

A) Kümelerin fark ve tümleme işlemlerinin özellikleri verilir.

B) Gerçek hayat problemlerine yer verilir

9. 2. 2. 2. İki kümenin kartezyen çarpımıyla ilgili işlemler yapar.

A) Sıralı ikili ve sıralı ikililerin eşitliği örneklerle açıklanır.

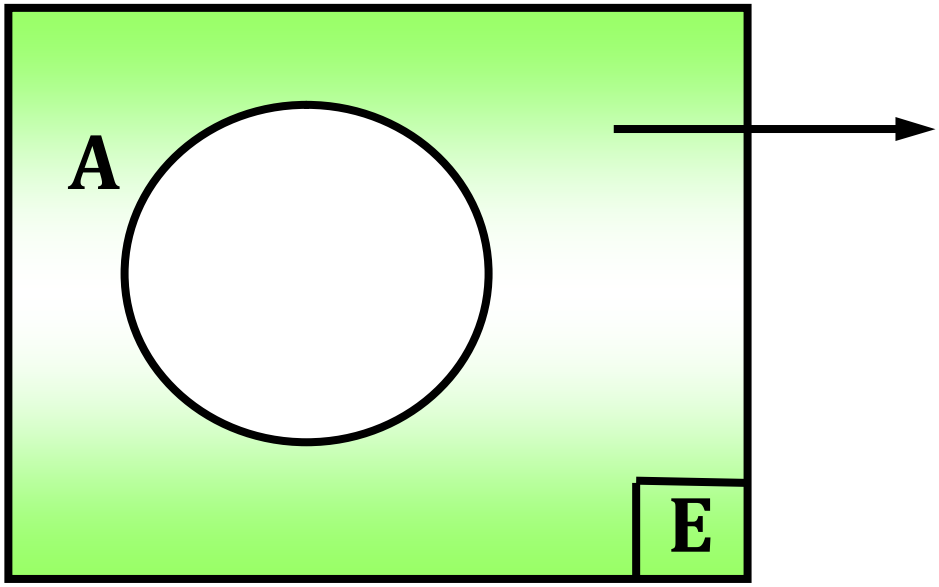
B) Kartezyen çarpımın eleman sayısı buldurulur.

C) Sadece sonlu sayıda elemanı olan kümelerin kartezyen çarpımlarının grafik çizimi yapılır.

Kümelerde Tümleme İşlemi

E evrensel küme olsun. E 'nin bir alt kümesi verildiğinde, E 'ye ait olup A 'ya ait olmayan elemanların kümesine " A 'nın tümleyeni " adı verilir ve A' ile gösterilir.

$A' = \{ x : x \in E \text{ ve } x \notin A \}$ **olarak belirtilir.**



Boyalı bölge A'

kümesini gösterir.

Örnek : **E = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 } , A = { 2 , 4 , 6 , 7 , 8 } ve B = { 4 , 7 , 8 } kümeleri veriliyor. A , B ⊆ E 'dir. A ' , B ' kümelerini bulup ; A , B ve E kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.**

Soru : **E = { x : x bir rakamdır } evrensel küme olsun. A , B ⊆ E 'dir. A = { x : x çift sayıdır } ve B = { x : x asal sayıdır } kümeleri için A ' , B ' kümelerini bulup ; A , B ve E kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.**

Özellikler :

1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

} **De Morgan kuralları olarak adlandırılır.**

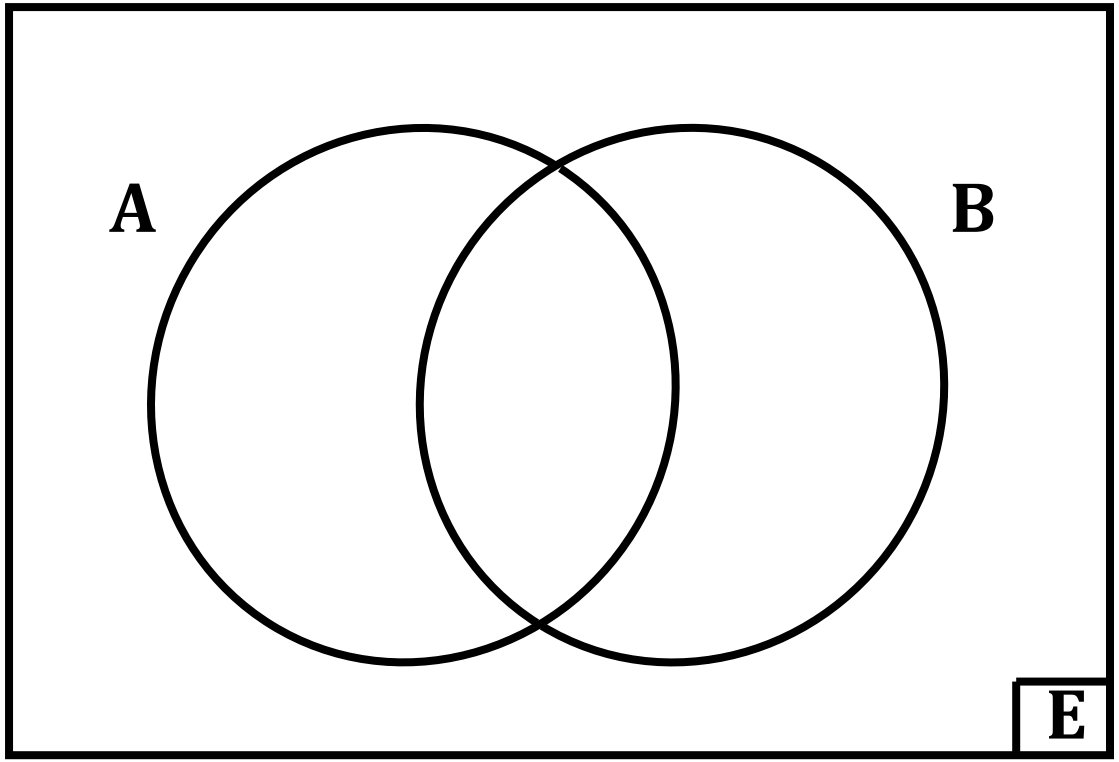
özellikleri sağlanır.

Soru : $A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **ve** $B' = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ **kümeleri için ;**

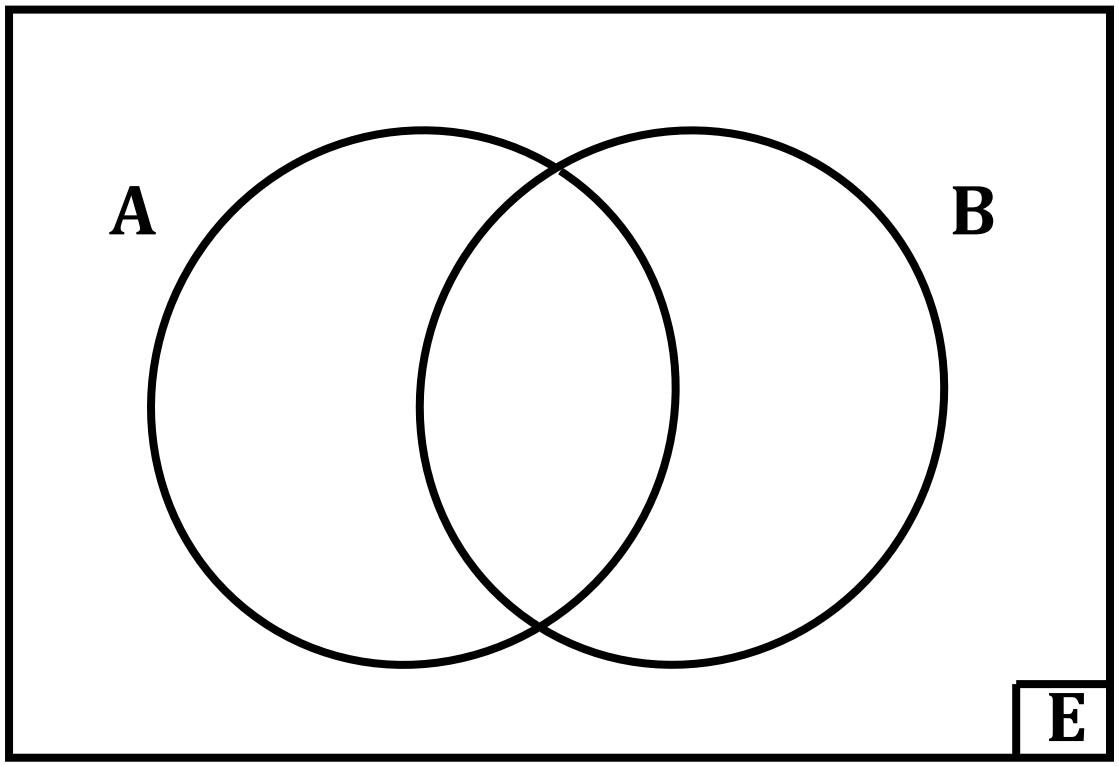
A) $s[(A \cap B)'] = ?$

B) $s[(A \cup B)'] = ?$

Soru : **s (A ∩ B) = 2 , s (A' ∩ B') = 3 , s (A') = 5 ve s (E) = 14 ise s (B') = ? (Verilenler şemada yerleştirilerek çözüme gidilir.)**



Soru : **s (A' ∩ B') = 5 , s (A') = 12 , s (B') = 15 ve s (E) = 40 ise s (A ∩ B) = ?**



Özellikler : **E evrensel kümesinde ;**

3) $A \cup A' = E$ **4)** $A \cap A' = \emptyset$

5) $(A')' = A$ **6)** $\emptyset' = E$

7) $E' = \emptyset$

Örnek : **A ve B kümesi E evrensel kümenin alt kümeleridir.**

B ⊆ A ise, $(A \cap A')' \cup B = ?$

Soru : **A ve B, E evrensel kümenin alt kümeleridir. $A \subseteq B$ ise,**

$[(A \cup A') \cup B] \cap (B \cap A) = ?$

Soru : **A ve B, E evrensel kümenin alt kümeleridir.**

$(B \cup A) \cap (B \cup A') = ?$ (Dağılma özelliği tersine çevrilir.)

Soru : **A ve B, E evrensel kümenin alt kümeleridir.**

[(A ∪ B) ∩ (A ∪ B')] ∩ (A' ∪ B) = ?

8. Özellik : **A kümesi E evrensel kümenin alt kümesidir. Buna göre** $s(A) + s(A') = s(E)$ **olarak alınır.**

Soru : $A, B \subseteq E$ **'dir.** $s(E) = 62$ **olup,**

$s(A) + s(A') + s(B) = 80$ **ise** $s(B') = ?$

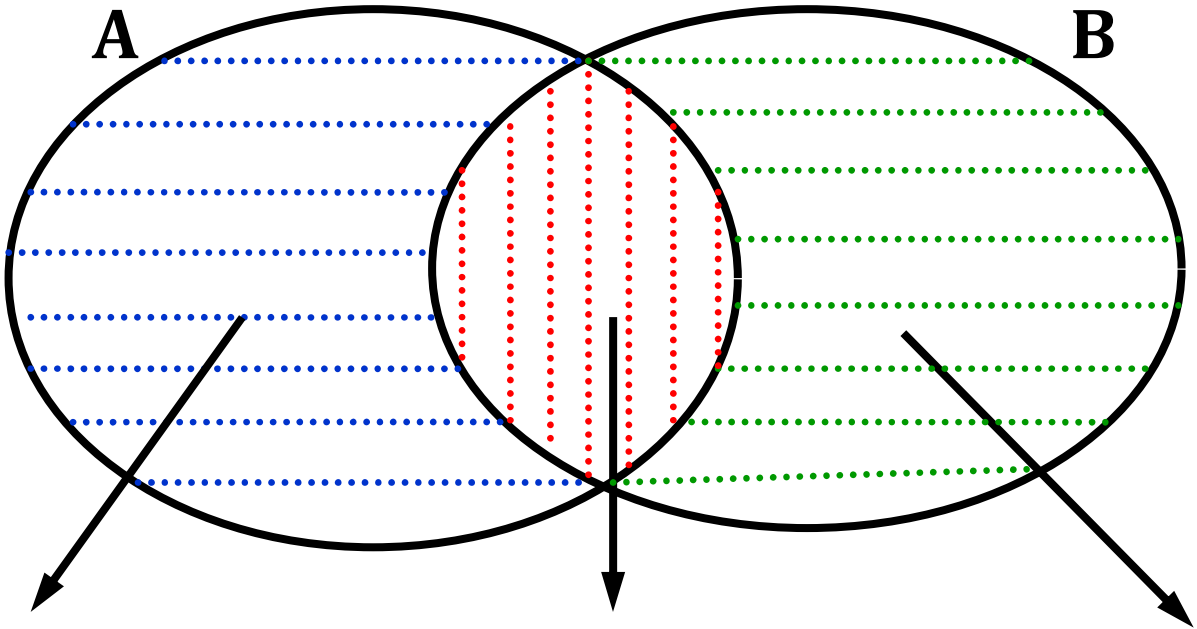
Soru : **A , B , C ⊆ E 'dir.**

$$\left.\begin{array}{l} s(A) + s(B') = 27 \\ s(C) + s(B) = 13 \\ s(A') + s(C') = 20 \end{array}\right\} \quad \text{ise } s(E) = ?$$

Kümelerde Fark İşlemi

A 'da olup B 'de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye " A 'nın B 'den farkı " kümesi adı verilir. A / B veya A – B olarak gösterilir.

$$A - B = \{ x : x \in A \text{ ve } x \notin B \text{'dir} \}$$



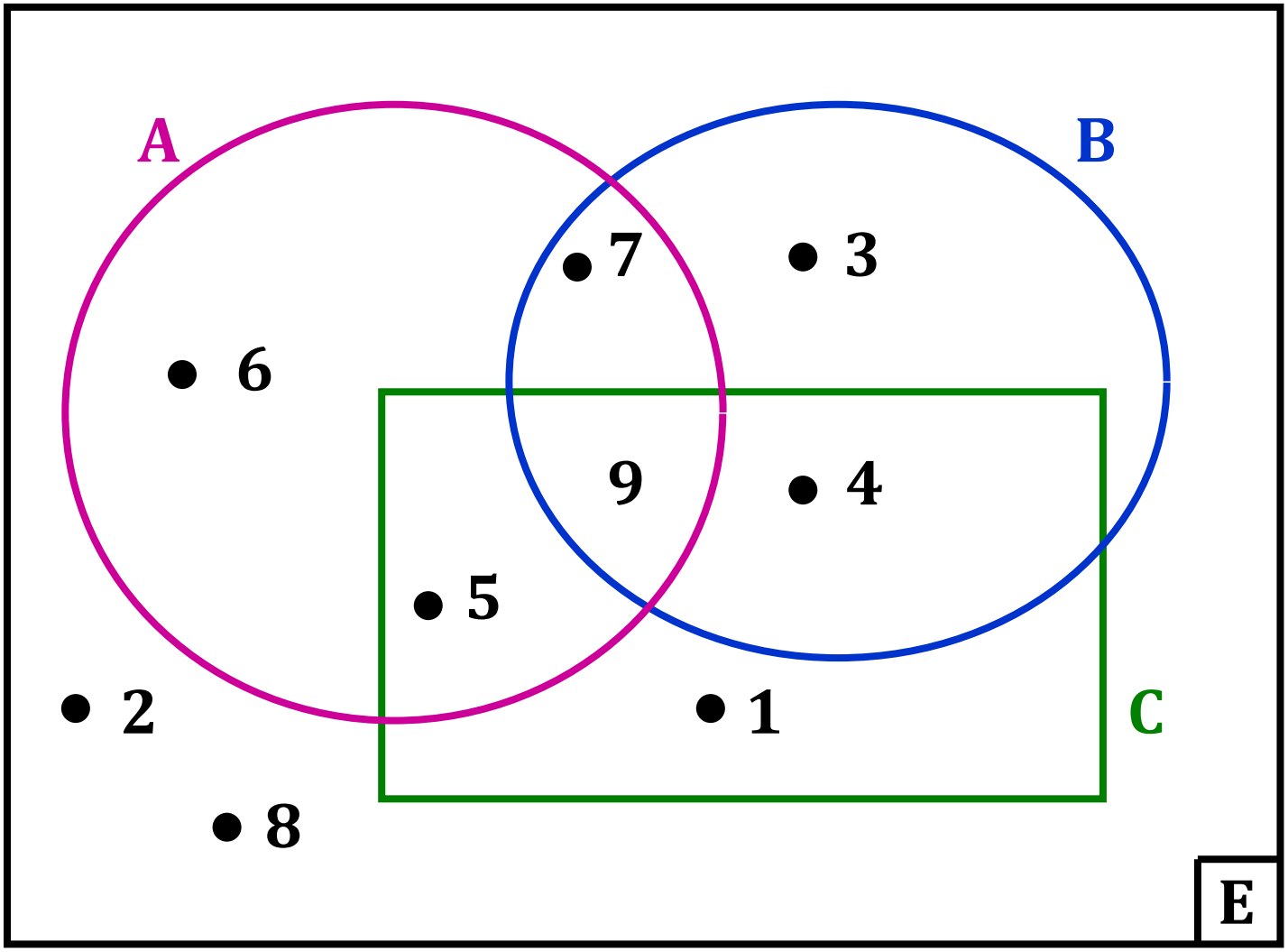
A – B **A ∩ B** **B – A**

Örnek : **A = { x : x , ANTAKYA ilinin bir harfidir } ,**

B = { x : x , TRAKYA kelimesinin bir harfidir } kümeleri için;

A – B ve B – A kümelerini bulup Venn şeması ile gösteriniz.

Soru :



Verilenlere göre;

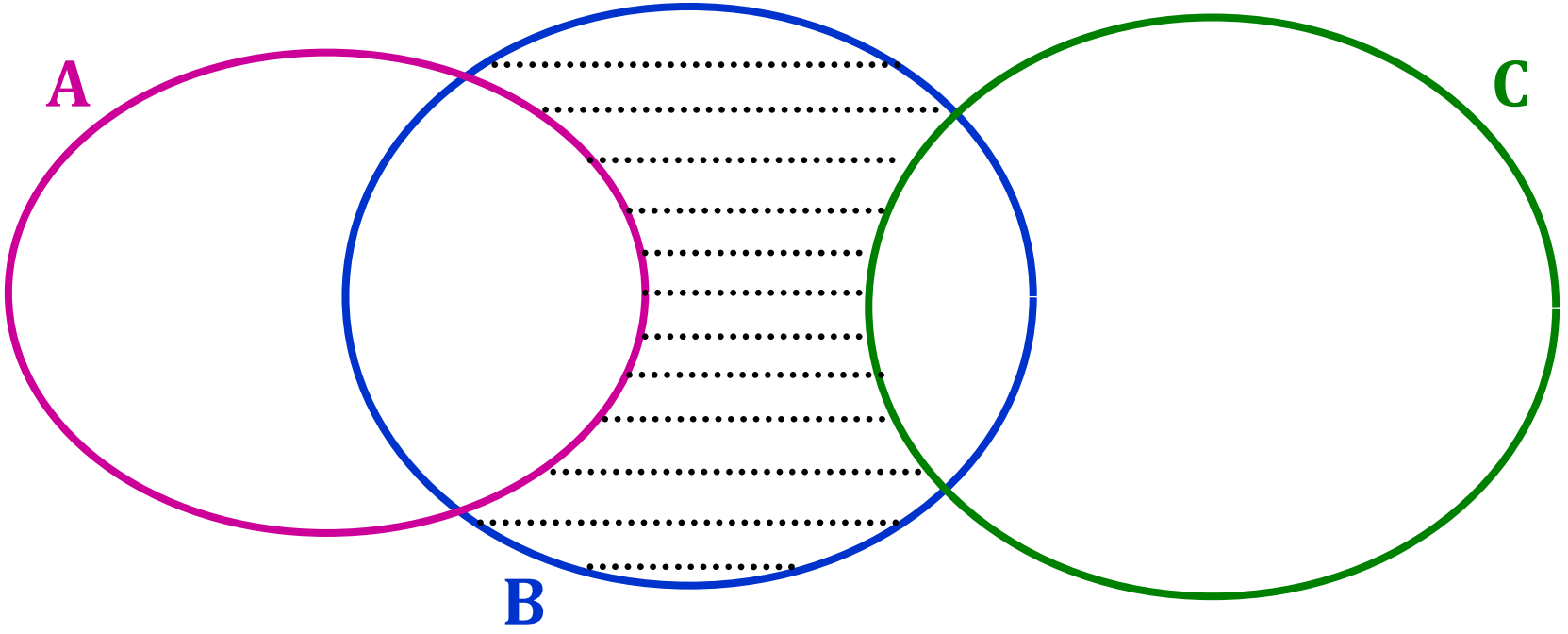
A) **(A ∩ B) – (B ∩ C) = ?**

B) $A' - B = ?$

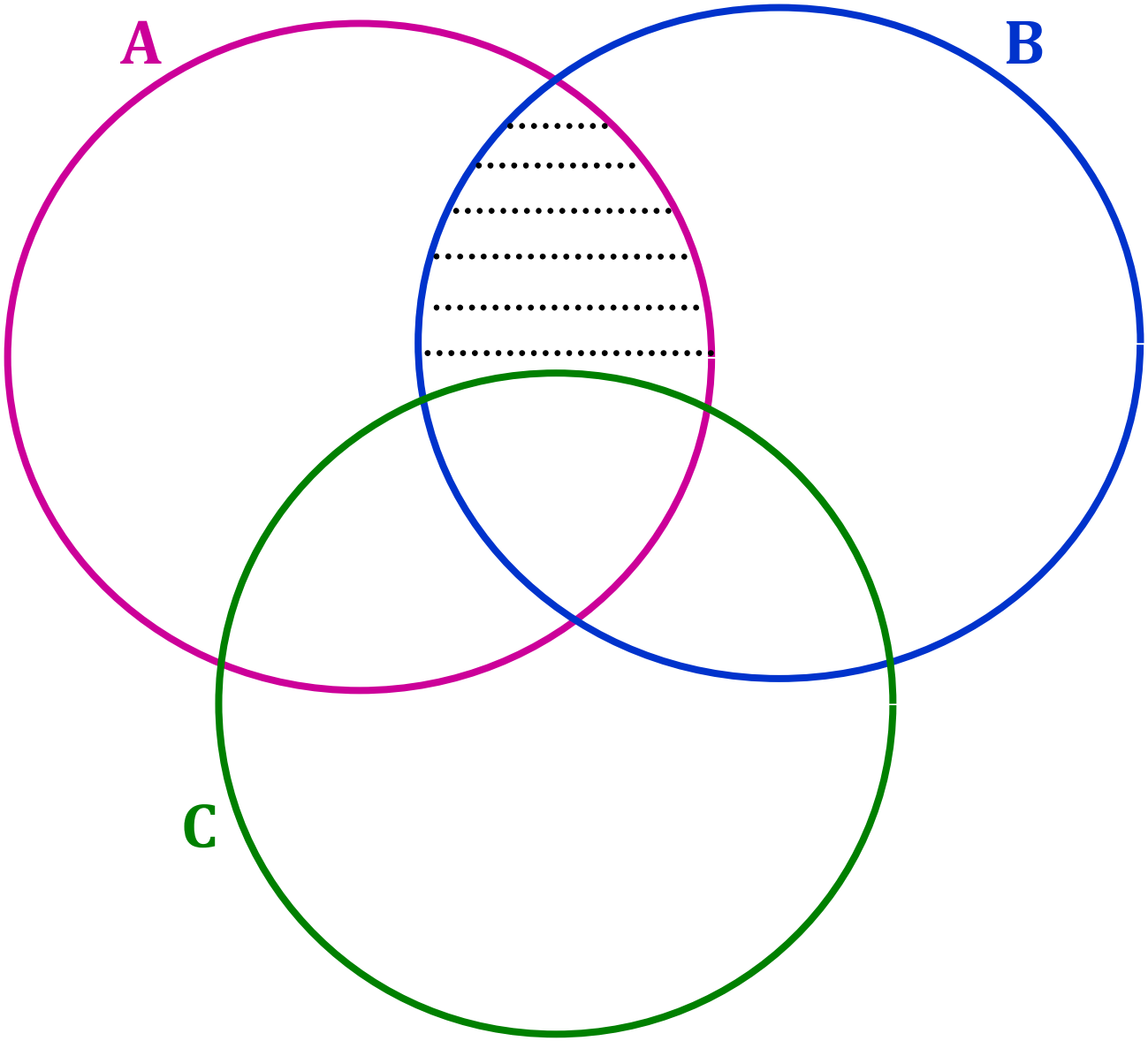
C) $(A \cup B') - C = ?$

Soru : **Aşağıdaki taralı bölgeleri veren kümelerin adını yazınız.**

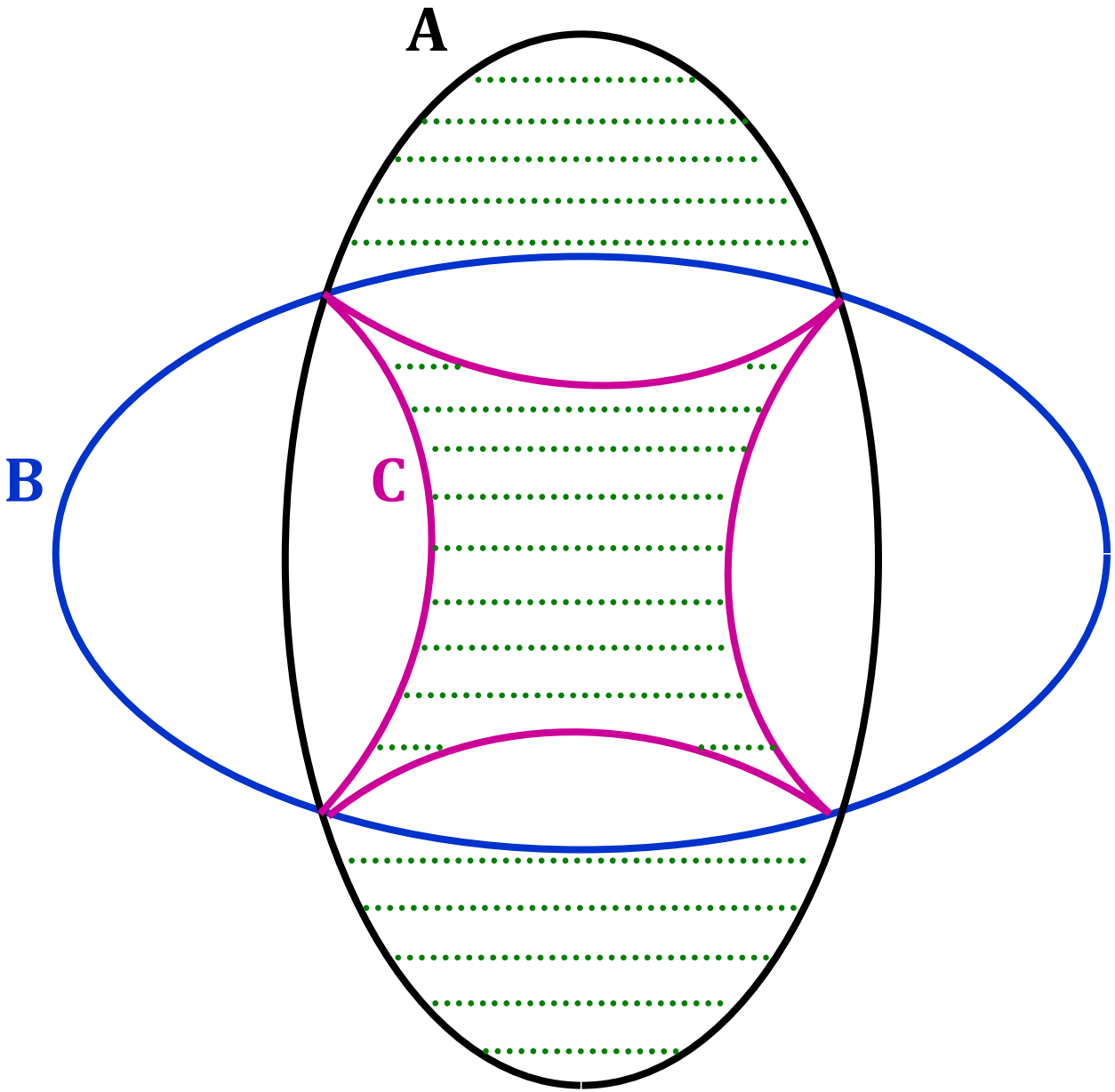
1)



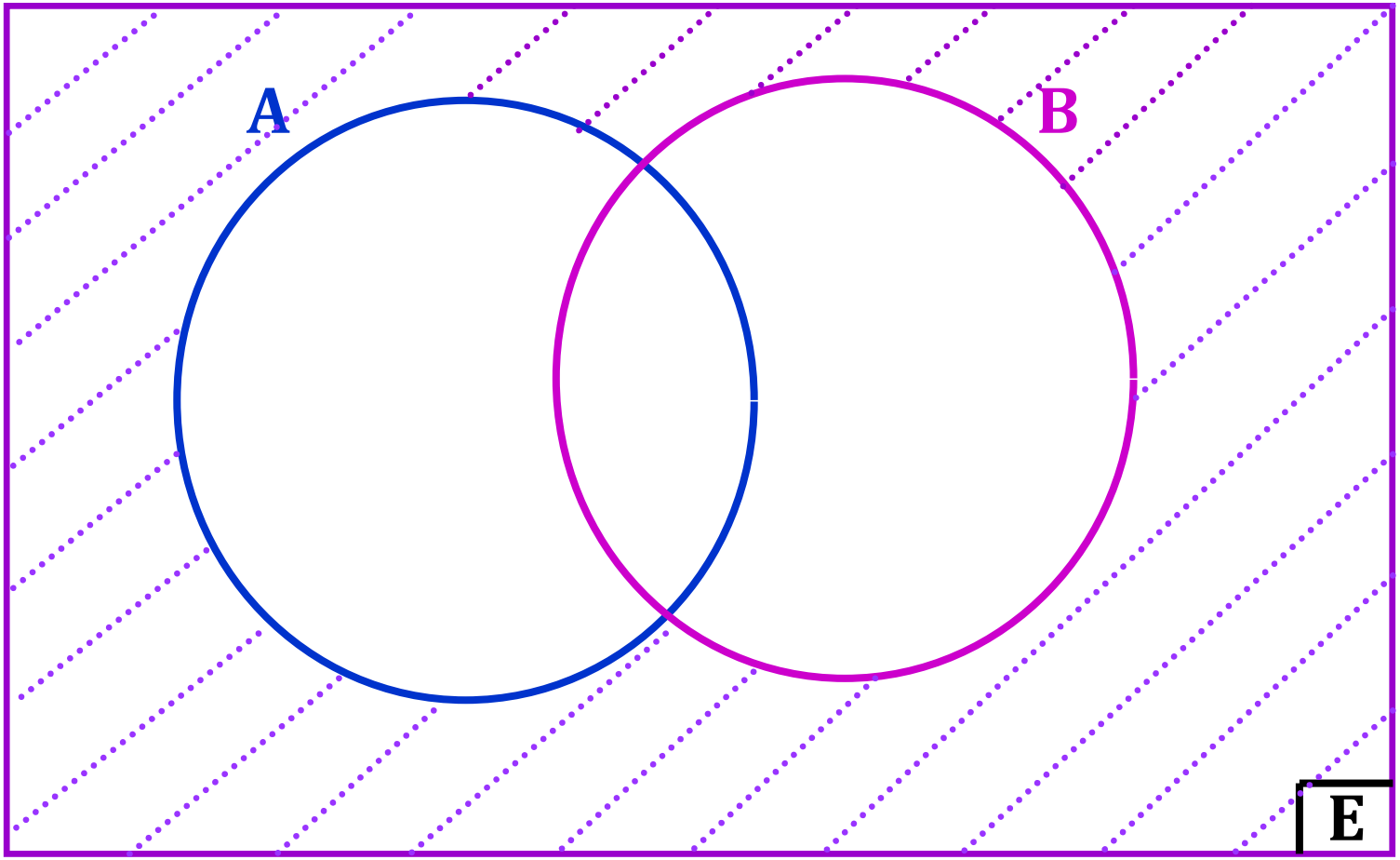
2)



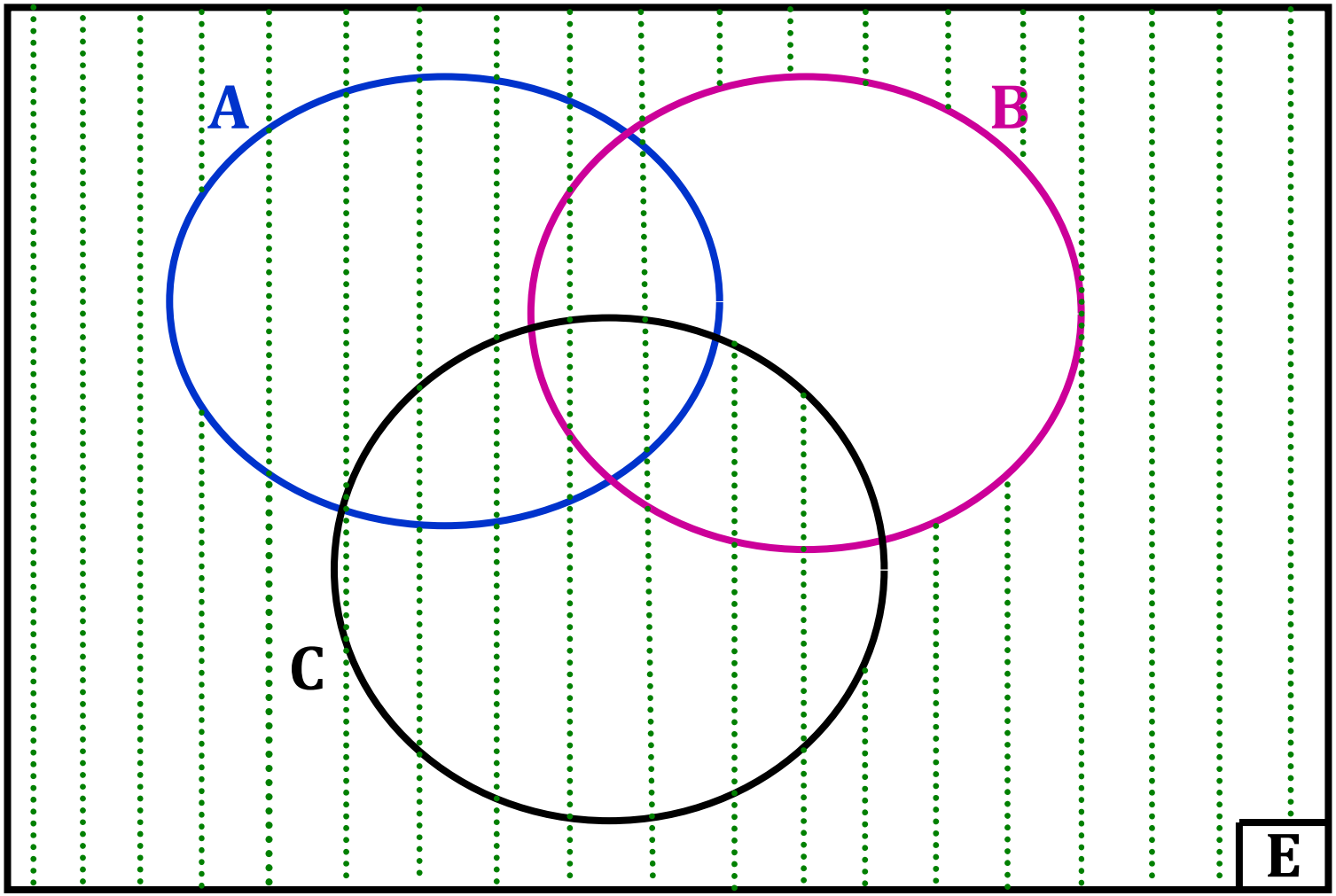
3)



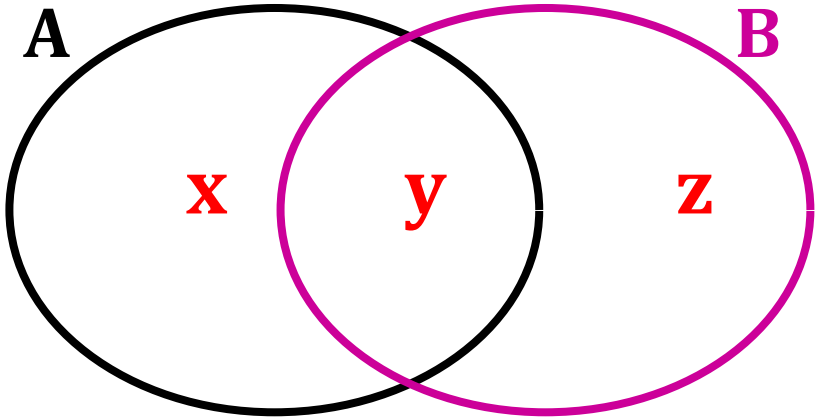
4)



5)



Not :



Kümelerde verilen sayılar şemada uygun yerlere yerleştirilerek istenilene ulaşılmaya çalışılır.

Örnek: **s (A – B) = 7 , s (B – A) = 6 ve s (A ∪ B) = 21 ise s (A ∩ B) = ?**

Soru : **s (A – B) = 8 , s (A) = 15 ve s (B – A) = 10 ise s (A ∪ B) . s (A ∩ B) = ?**

Soru : $s(B - A) = 5$, $s(A \cap B) = 2$ ve $s(A) = 3.s(B)$ ise $s(A \cup B) = ?$

Soru : **s (A – B) = s (A ∩ B) , s (B – A) = s (A) ve s (A ∪ B) = 24 ise s (B) = ?**

Soru : $s(M - N) = 5.s(M \cap N)$, $4.s(M) = 3.s(N)$ ve $s(M \cup N) = 39$ ise $s(M - N) = ?$

Özellikler :

1) $A - A = \emptyset$ **2) $A - \emptyset = A$** **3) $\emptyset - A = \emptyset$**

4) $A - B \neq B - A$ (Çoğunlukla eşitlik sağlanmaz.)

5) $E - A = A'$ **6) $A - B = A \cap B'$, $B - A = B \cap A'$ olarak alınır.**

Soru : **$s(A \cap B') = 8$, $s(A \cap B) = 6$ ve $s(A \cup B) = 20$ ise $s(B) = ?$**

Soru : $s(A \cap B') = 7$, $s(A \cup B) = 35$ ve $s(B \cap A') = 11$ ise $s(A \cap B) + s(A) = ?$

Soru : **Alttaki ifadelerin sonucunu bulunuz.**

A) $(E - A) \cap A' = ?$

B) $(A - B) \cap B = ?$

C) $A \cup (A - B)' = ?$

Soru : **A , B ⊆ E 'dir. E evrensel kümedir.**

(B – A ') ' ∩ E = ?

Soru : **[(A ∩ B) ∩ (A ∪ A ')] ∪ (A – B) = ?**

Problemler

Örnek : **Çay veya kahve sevenlerin bulunduğu grupta; grubun % 80 'i çay, % 45 'i de kahve sevmektedir. Sadece kahve sevenler grubun % kaçını oluşturur ? (Grubun tamamı % 100 alınır. Faz-lalık kesişime aittir.)**

Soru : **Bir gruptakilerin % 75 'inde kurşun kalem, % 60 'ında tükenmez kalem vardır. Kurşun kalem veya tükenmez kalemi olan kişilerin sayısı 40 kişi ise sadece tükenmez kalemi olan kaç kişi vardır ?**

Soru : **Bir okuldaki öğrencilerin % 60 'ı matematik, % 50 'si fizikten başarılıdır. Her iki dersten de başarısız olanlar grubun % 30 'udur. İki dersten de başarılı olan 200 kişi varsa, sadece matematikten başarılı olan kaç kişi vardır ? (Evrensel kümede gösterilir.)**

Not : **Şemada verilmeyenler yerine harf verilerek, denklem çözümlerinden istenen elde edilir.**

Örnek : **25 kişilik bir gruptakiler futbol veya voleyboldan birini oynayabilmektedir. Sadece futbol oynayabilenlerin sayısı, sadece voleybol oynayabilenlerin sayısının 3 katıdır. Her iki sporu da oynayabilen 5 kişi varsa voleybol oynayabilen kaç kişi vardır ?**

Örnek : **Herkesin en az bir dil bildiği 30 kişilik kafilede, 14 kişi İngilizce, 21 kişi Almanca bilmektedir. Buna göre sadece Almanca bilen kaç kişi vardır ?**

Soru : **17 kişinin futbol, 13 kişinin de voleybol oynayabildiği 23 kişilik grupta 2 kişi bu iki sporu da oynayamamaktadır. Bu iki sporu oynayabilen kaç kişi vardır ?**

Soru : **Bir grupta satranç bilen 20, tavla bilmeyen 18, satranç bilmeyen 25, satranç veya tavla bilen 30 kişi varsa, grupta sadece satranç bilen kaç kişi vardır ?**

Soru : **En çok bir oyun bilinen 40 kişilik grupta; dama bilmeyenlerin sayısı 22, tavla ve damadan birini bilenlerin sayısı 28 ise grupta iki oyunu da bilmeyen kaç kişi vardır ?**

Soru : **40 kişilik grupta, İngilizce bilenler aynı zamanda Türkçe'de bilmektedirler. Grupta İngilizce bilmeyen 18, Türkçe bilen 25 kişi vardır. Buna göre sadece Türkçe bilen kaç kişi vardır ?**

Soru : **En az bir dil bilinen grupta; Almanca bilen 30 kişi, İngilizce bilen 20 kişi, sadece bir dil bilen 24 kişi vardır. Buna göre sadece Almanca bilen kaç kişi vardır ?**

Soru : **Sadece dört oyunun bilindiği grupta; 40 kişi dama, 50 kişi tavla, 40 kişi okey ve 50 kişi satranç bilmiyor. Buna göre grupta satranç bilen kaç kişi vardır ?**

Soru : **Herkesin en çok bir oyun bildiği grupta; dama bilmeyen 18, tavla bilmeyen 21 ve satranç bilmeyen 23 kişi vardır. 6 kişi ise bu üç oyunu da bilmemektedir. Buna göre dama bilen kaç kişi vardır ?**

Soru : **55 kişilik sınıfta; kimyadan başarılı, fizikten başarılı ve bu ikisinden de başarılı olmayanların sayısı birbirine eşittir. Kimyadan veya fizikten başarılı olanların sayısı 35 ise iki dersten de başarılı olan kaç kişi vardır ?**

Soru : **49 kişilik sınıftaki kızların sayısı 27 'dir. Sarışın erkeklerin sayısı 8 olup, esmer kızların sayısı sarışın erkeklerin sayısından 7 fazladır. Buna göre sınıfta esmer olan kaç öğrenci vardır ? (Bu tarz sorularda tablo kullanmak daha yararlıdır.)**

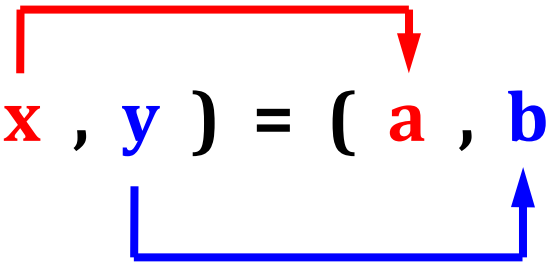
Soru : **50 kişilik sınıftaki kızların sayısı 22 'dir. Matematik dersinden başarılı olan erkek öğrencilerin sayısı, bu dersten başarısız olan kız öğrencilerin sayısının 2 katına eşittir. 32 öğrenci matematik dersinden başarılı ise matematik dersinden başarılı olan erkek öğrenci sayısı kaçtır ?**

Soru : **33 kişilik sınıfta gözlüklü kızların sayısı; gözlüklü olmayan erkeklerin sayısının üçte birine, gözlüklü erkeklerin sayısının yarısına, gözlüklü olmayan kızların sayısının ise beşte birine eşittir. Buna göre kızların sayısını bulunuz.**

Kartezyen Çarpım Kümesi

Sıralı İkililerin Eşitliği

x ve y gibi iki elemanın, sırası önemli olmak üzere oluşturulan (x , y) elemanına " sıralı ikili " adı verilir.



(x , y) = (a , b) ise x = a ve y = b olarak alınır.

1. eleman eşitliğin karşısındaki 1. eleman ile, 2. eleman yine eşitliğin karşısındaki 2. eleman ile eşitlenir.

Örnek : **(3x – 7 , 4) = (11 , – 2y – 6) ise x . y = ?**

Soru : $(5 - 2x, x + 2) = (-7, 3y - 1)$ ise $x + y = ?$

Soru : $(\ 125\ ,\ 3^{2+y}\ ) = (\ 5^{x-1}\ ,\ 81\ )$ ise $x - y = ?$

Soru : **(2x – 3y , 3y + 2x) = (13 , 7) ise x . y = ?**

(Taraf tarafa yok etme metodu kullanılır. Daha sonra denklemler konusunda tekrar işlenecek.)

Soru : $(2x + 3y , -4) = (-1 , y - 3x)$ ise $x + y = ?$

Kartezyen Çarpım Kümesi

A ve B boş olmayan iki küme olsun. Birinci elemanı A , ikinci elemanı B 'den olan tüm sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye " A ile B 'nin kartezyen çarpım " kümesi adı verilir ve A x B ile gösterilir.

$A \times B = \{ (x , y) : x \in A , y \in B \}$ olarak yazılır.

Örnek : **$A = \{ -3 , 2 , 4 \}$ ve $B = \{ 1 , 5 \}$ kümeleri için A x B kümesini bulalım.**

Soru : **$A = \{ x : x \in N , -4 < x \leq 3 \}$ ve $B = \{ x : x \in Z , -2 \leq x < 0 \}$ kümeleri için $A \times B$ kümesini bulunuz.**

Soru : **A = { x : x doğal sayısı 5 'i tam böler } ve B = { x : x ∈ Z , – 6 ≤ x ≤ 12 , x = 6k } kümeleri için B x A kümesini bulunuz.**

Soru : **K = { x : x , ARABA kelimesinin bir harfidir } veriliyor. K x K kümesini bulunuz.**

Soru : **A x B = { (k , 3) , (m , 2) , (k , *) , (m , 3) , (t , 2) , (m , 5) , (m , *) , (k , 2) , (t , *) , (t , 3) , (k , 5) , (t , 5) } ise s (A) + s (B) = ?**

Not : **Bulduğumuz kümenin analitik düzlemde gösterimi istenirse A x B kümesi için ; A kümesindeki elemanlar x ekseninden, B kümesindeki elemanlar y ekseninden alınarak noktalar işaretlenir.**

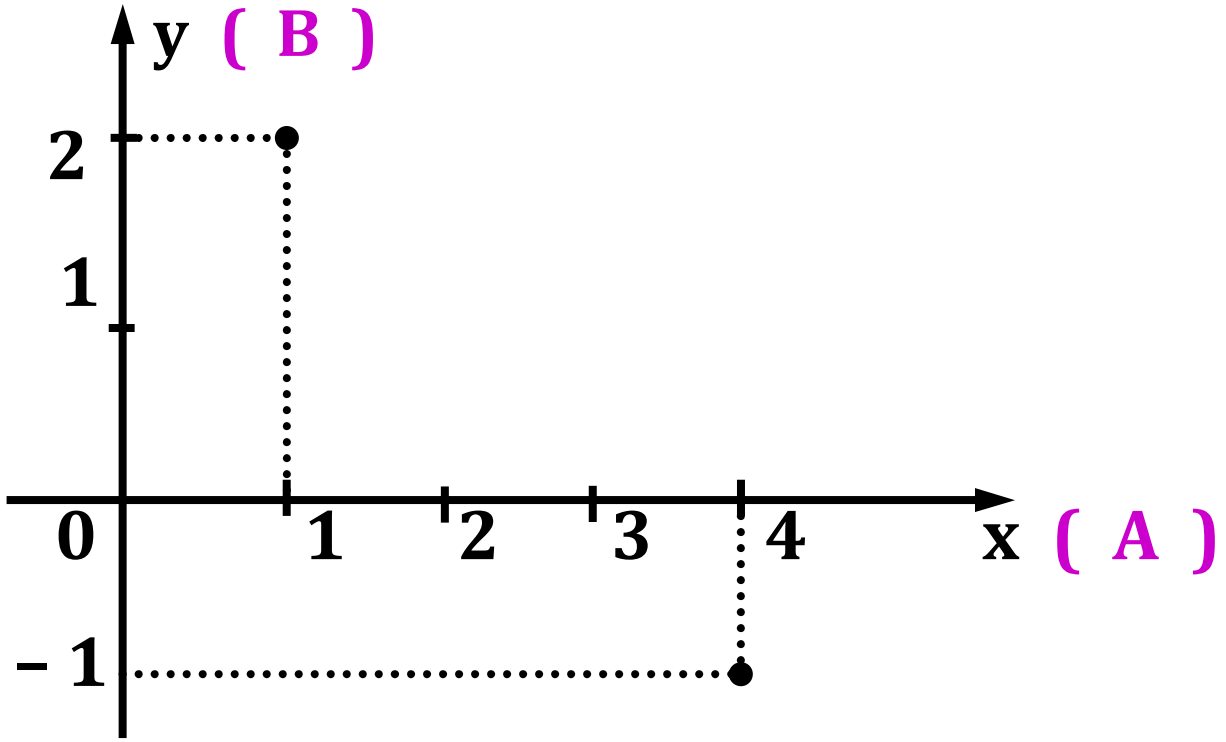
B x A kümesinde ise ; B kümesindeki elemanlar x ekseninden, A kümesindeki elemanlar y ekseninden alınarak noktalar işaretlenir.

Örneğin ;

A x B = { (1 , 2) , (4 , – 1) }

kümesini

alalım.



Soru : **A = { 1 , 2 , 3 } ve B = { x : x ∈ N , x^2 < 16 } ise A x B kümesini bulup, kümeyi koordinat sisteminde gösteriniz.**

Soru : **A = { – 1 , 2 , 4 } veriliyor. A x A kümesini bulup, kümeyi koordinat sisteminde gösteriniz.**

Özellikler :

1) $A \times B \neq B \times A$ (Bazı özel durumlar hariç)

2) $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$

3) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

5) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

6) $A \times \emptyset = \emptyset$ (Sıralı ikililer oluşturmaz)

7) $\emptyset \times A = \emptyset$

8) $A \times B = \emptyset$ ise $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ olmalıdır.

Soru : **A x B = { (1 , a) , (3 , a) , (3 , b) , (2 , a) , (1 , b) , (2 , b) } ve A x C = { (1 , b) , (2 , c) , (3 , c) , (3 , b) , (1 , c) , (2 , b) } ise A x (B ∩ C) = ?**

(Kümeler tek tek bulunup ta istenen elde edilebilir.)

Örnek : $s(A \times A) = 36$

$s(A \times B) = 24$

ise $s(B) = ?$

Soru : $s(A \times A) = 121$

$s(B \times B) = 169$

ise $s(A \times B) = ?$

Soru : $s(A \times B) = 13$

$s(A \times C) = 9$

} ise $s(B \times C) = ?$

Soru : $A \subseteq B$ 'dir. $s(C) = 8$ ve $s(A \cup B) = 7$ ise $s(B \times C) = ?$

Soru : **s (A) = 5 , s (B) = 9 ve s (C) = 12 ise;**

A) s [(A ∪ B) x C] en az kaçtır ? (A ile B 'nin durumu şema ile düşünülür.)

B) s [(A ∪ B) x C] en fazla kaçtır ?