(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

9. 3. 2. 3. Mutlak değer içeren birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.

A) Bir gerçek sayının mutlak değeri hatırlatılarak mutlak değer özellikleri verilir.

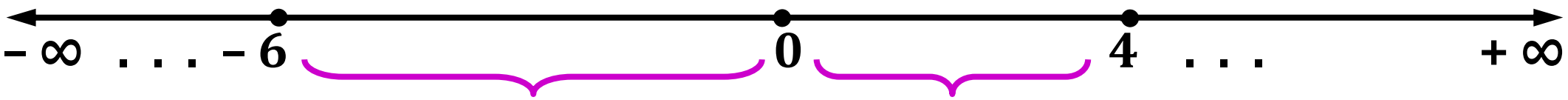
($x , y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ ve $a , b \in \mathbb{R}^+$)

$\lvert x \rvert \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$	$\lvert x \rvert \ge a \Leftrightarrow x \ge a \vee x \le -a$
$a \le \lvert x \rvert \le b \Leftrightarrow a \le x \le b \vee -b \le x \le -a$	
$\lvert x . y \rvert = \lvert x \rvert . \lvert y \rvert$	$\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$, $(y \neq 0)$
$\lvert -x \rvert = \lvert x \rvert$	$\lvert x^n \rvert = \lvert x \rvert^n$
$\lvert x + y \rvert \le \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$	

B) İkiden çok mutlak değer içeren denklem ve eşitsizliklere girilmez.

Mutlak Değer

Bir x sayısının mutlak değeri, sayı doğrusu üzerinde bu sayının sıfır noktasına olan uzaklığını gösterir ve | x | ile gösterilir.



Uzaklık 6 br'dir. **Uzaklık 4 br'dir.**

| – 6 | = 6 ve | 4 | = 4 olarak alınır.

Kural : **x ∈ R olsun.**

$$|x| = \begin{cases} x \text{ olarak çıkar} & , \ x \geq 0 \text{ ise} \\ -x \text{ olarak çıkar} & , \ x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak alınır. Yani mutlak değerin sonucu her zaman pozitif veya sıfıra eşit olmalıdır.

| – 6 | = – (– 6) = 6 , | 4 | = 4 , | 0 | = 0 v. b.

*** **Mutlak değerin iç kısmındaki grup ; pozitif sonuçlu ise grup dışarı işaret değiştirmeden, negatif sonuçlu ise grubun başına – işareti alınarak dışarı çıkarılır.**

Örnek : $|\ 8 - 6\ | + |\ -4 - 6 - 2\ | - |\ 11 - 6\ | = ?$

Örnek : $|\ 5 - \sqrt{32}\ | = ?$

Soru : $|\sqrt{5} - 3| + |\sqrt{5} - 1| = ?$

Soru : $|\sqrt{6} + 4| + |\sqrt{6} - 2| = ?$

Soru : $|\sqrt{15} - 3| + |5 - \sqrt{15}| + |-8| = ?$

Not : **Aşağıdaki tip sorularda bilinmeyen yerine rastgele sayı seçilerek mutlak değerin iç kısmının işaret durumu kontrol edilir.** *** **Seçilen sayı kesinlikle işlemin sonucunda yazılmaz.**

Örnek : **x > 8 ise | x – 3 | + | 5 – x | = ?**

Soru : $x < 2$ ise; $|x-3| - 2x + |8-x| = ?$

Soru : $x > -1$ ise; $|x+2| - |-6-x| = ?$

Soru : $-4 \leq x < 6$ ise; $|x+5| + |-x+7| + |x-9| = ?$

Soru : $-3 < x \leq 2$ ise; $|x-3| + |x+4| - |5-x| = ?$

Soru : $x < 0$ ise; $x + |x| + |-x| + |x-2| + \dfrac{|2x|}{x} = ?$

Soru : $x < 0 < y$ ise $2 . |x - y| + |x| - |y| = ?$

Soru : $x < 0 < y$ ise $|y - x| + |-x| - y = ?$

Soru : $x < y$ ise $|x - y| + |y - x| - (x - y) = ?$

Soru : $x < y < z$ ise $|x - y| + |z - x| - |y - z| = ?$

Not : **| ax + b | + | cx + d | + . . . ifadesinin en küçük olması için; mutlak değerlerden birinin sıfır, diğerlerinin de küçük olması gerekir.**

İşlem için iç kısımlar sırayla sıfıra eşitlenir. Sırayla hangi x değeri için toplamın en küçük olabileceği bulunur.

Örnek : **A = | x − 5 | + | 2x + 2 | toplamının en küçük değeri kaç olur ?**

Soru : **A = | 3x − 3 | + | x + 2 | toplamının en küçük değeri kaç olur ?**

Soru : **$A = |x - 2| + |2x - 6| + |x + 1|$ toplamının en küçük değeri kaç olur ?**

Soru : $A = \dfrac{18}{|x-4|+|2x-2|}$ **ifadesinin en büyük değeri kaç olur ?**

Mutlak Değerli Denklemler

Kural 1: **$|a| + |b| = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$ olmalıdır. Yani; mutlak değerli ifadelerin toplamı sıfırsa, her bir mutlak değerin içi sıfıra eşitlenir.**

Örnek : **$|3 - x| + |3y - 12| = 0$ ise $x \cdot y = ?$**

Soru : $|x + y - 3| + |x - 4| = 0$ ise $x - y = ?$

Soru : $|3m + 15| + |n - m + 6| = 0$ ise $m \cdot n = ?$

Kural 2: **| x | = a ise x = a veya x = – a olmalıdır.**

| x | = 2 ise x = 2 veya x = – 2 olabilir. Çünkü

| 2 | = 2 ve | – 2 | = 2 olarak bulunur.

Örnek : **| x + 5 | = 6 ise x = ?**

Soru : $|\ 3x - 9\ | = 15$ ise $x = ?$

Soru : $|\ 10 - 2x\ | = 14$ ise $x = ?$

Soru : $|-16+4x| = -20$ ise $x = ?$

Soru : $2 \cdot |3x-1| - 4 = 12$ ise $x = ?$ **(Mutlak değer yalnız bırakılır.)**

Soru : **$-3 \cdot |5 - 2x| + 7 = -8$ ise denklemi sağlayan x değerlerinin toplamı ne olur ?**

Örnek : $\big|\,|x-2|-1\,\big| = 7$ ise $x = ?$

Soru : $\left|\,\left|\,3 - x\,\right| + 4\,\right| = 11$ ise $x = ?$

Soru : $\big|\,\big|\,2x - 4\,\big| - 10\,\big| = 4$ ise $x = ?$

Not : **Sayı doğrusu üzerindeki a ile b sayıları arasındaki uzaklık $|a-b|$ sonucu ile bulunur.**

Soru : **Sayı doğrusu üzerinde $x+2$ ile 7 sayıları arasındaki uzaklık 3 br ise x sayılarının alabileceği değerlerin çarpımı ne olur ?**

Not : $|x| = |-x|$, $|a.x| = |a|.|x|$ ve

$|a.x + a.k| = |a.(x + k)| = |a|.|x + k|$

olarak alınabilir.

Örnek : $|x| + |-5x| = 24$ ise $x = ?$

Soru : **| 8x | – | – 3x | = 55 ise denklemi sağlayan x değerlerinin çarpımı ne olur ?**

Soru : $|x+2|+|2x+4|=12$ ise $x=?$

Soru : $|x-3|+|-4x+12|=30$ ise $x=?$

Kural 3 : **| x | = | y | ise x = y veya x = – y olmalıdır. Yani; iki mutlak değer birbirine eşit ise, iç kısımlar ya birbirine eşit ya da biri diğerinin ters işaretlisi olmalıdır.**

Örneğin; | 6 | = | 6 | , | 6 | = | − 6 | eşitlikleri sağlanır.

Örnek : **| x − 4 | = | 2x + 10 | ise x = ?**

Soru : $|2x + 20| = |5 - 3x|$ ise $x = ?$

Soru : $|4x - 6| = |24 - 6x|$ ise $x = ?$

Kural 4: **| ax + b | = cx + d ise;**

ax + b = cx + d ve – (ax + b) = cx + d denklemlerinin çözümü bulunur. Bulunan değerler için baştaki denklemde sağlama yapılır.

Örnek : **| x + 3 | = 12 – 2x ise x = ?**

Soru : $|x-2| = 3x + 10$ ise $x = ?$

Soru : $|5 - x| = 3x - 11$ ise $x = ?$

Kural 5: **A) (İfade mutlak değerden aynı çıkıyorsa)**

$|\ ax + b\ | = ax + b$ ise $ax + b \geq 0$ olmalıdır.

Eşitsizliğin çözümü bize isteneni verir.

B) (İfade mutlak değerden – ile çarpılmış olarak çıkıyorsa)

$|\ ax + b\ | = -ax - b$ ise $ax + b \leq 0$ olmalıdır.

Eşitsizliğin çözümü bize isteneni verir.

Örnek : **$|\ x - 5\ | = x - 5$ ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $|2x - 6| = -2x + 6$ **ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $|12 - 3x| = 3x - 12$ **ise x'in çözüm kümesindeki en küçük tam sayıyı bulunuz.**

Soru : $|x| = -x$ **ve** $|x + 4| = x + 4$ **ise** x**'in çözüm kümesini bulunuz.** **(İki ayrı çözümün ortak kümesi alınır.)**

Kural 6: **$x , y \in \mathbb{R} , n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;**

A) $|x . y| = |x| . |y|$

B) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $(y \neq 0)$, **C)** $|x^n| = |x|^n$

D) $|x + y| \leq |x| + |y|$ **olarak alınabilir.**

Soru : $\frac{4 . |x + y|}{|x| + |y|}$ **ifadesinin sonucu;** **A)** **En fazla kaç olur ?**

B) **Hangi tam sayılar olabilir ?**

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

Kural 1 : $|x| < a$ **ise** $-a < x < a$ **olarak alınır.**

Örnek : $|3x + 1| \leq 10$ **ise x 'in çözüm kümesini bulalım.**

Soru : $|\ 2x - 4\ | < 2$ **ise x 'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$2 . |x - 5| - 3 \leq 1$ ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$-3 \cdot |x+1| + 8 > 2$ ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $\dfrac{|x+6|}{|x|-3} \leq 0$ **ise x 'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **Sayı doğrusu üzerinde x – 2 sayısının 4 sayısına olan uzaklığı 5 br'den az ise x sayılarının çözüm aralığı ne olmalı-dır ?**

Kural 2 : **| x | > a ise x > a veya x < – a olarak alınır. İki çözümün bileşkesi alınır.**

Örnek : **| x – 3 | ≥ 6 ise x'in çözüm kümesini bulalım.**

Soru : $|-2+x| \geq 3$ **ise; A) x 'in çözüm kümesini bulunuz.**

B) Çözüm kümesindeki tam sayıların toplamı kaçtır ?

Soru : $|-2x+3|>7$ **ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Kural 3 : $a < |x| < b$ ise $a < x < b$ veya $-b < x < -a$ olarak alınır. İki çözümün bileşkesi alınır.

Örnek : $1 \leq |5 - x| < 9$ ise x'in çözüm kümesini bulunuz.

Soru : **$3 < |2x + 1| < 11$ ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : **$0 < |x + 2| \leq 5$ ise x'in çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $||x+1|-5| \leq 4$ **ise x'in çözüm kümesini bulunuz. (Kural 1 ve 3 kullanılır.)**