(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

9. 3. 3. Üslü İfadeler ve Denklemler

Terimler ve Kavramlar : Üslü ifade, taban, üs

Sembol ve Gösterimler : x^n

9. 3. 3. 1. Üslü ifadeleri içeren denklemleri çözer.

A) Üslü ifade kavramı hatırlatılır.

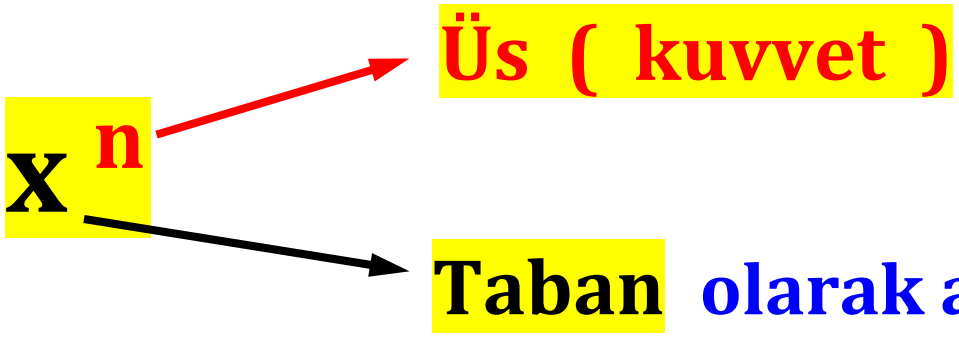
B) Bir gerçek sayının tam sayı kuvveti ile ilgili uygulamalar yapılır.

C) Üslü ifadelerin özellikleri üzerinde durulur.

Üslü İfade ve Denklemler

Üslü İfadeler

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için x^n ifadesine " üslü ifade " adı verilir.



$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ olarak açılır.

n adet

Aynı sayının birden çok çarpımını kolay bir şekilde göstermek için üslü ifadeler kullanılır.

Not : $x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$ olarak alınır.

Örnek : $3^4 + (-2)^3 = ?$

Soru : $\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = ?$

Soru : $2^4 - (-3)^3 + \dfrac{5^0}{63^1 - 8^2} = ?$

Soru : $-5^2 + (-1)^{1254} - \dfrac{10^2}{(-1)^0 + 3^2} = ?$

Kural 1 : (Üslü İfadelerde Çarpma İşlemi)

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ olarak alınır.

Yani çarpma işleminde; üslü ifadelerin tabanları aynı ise, sonucu aynı tabanda üslerin toplanması olarak alabiliriz.

Örnek : Aşağıda verilenleri tek tabanda üslü ifade olarak yazmaya çalışınız.

A) $3^{12} \cdot 9 \cdot 3^5 = ?$

B) $5^{12} \cdot 25 \cdot 5^{-2} \cdot 625 = ?$

C) $-2x^4 . x^6 . 3x^5 . (-x^6) = ?$

D) $16y^2 . 32y^3 . 4y^{11} = ?$

E) $a^{3x-3} . a^{4-x} . a^{-2x+1} = ?$

Not : **Örneğin ;**

$1{,}24 = 124 \cdot 10^{-2}$, $51{,}246 = 51246 \cdot 10^{-3}$

$3412 = 3{,}412 \cdot 10^{3}$, $27 = 0{,}27 \cdot 10^{2}$ **şeklinde yazılırdı.**

(Virgül sağa kaydırılırsa, kaydırma sayısı negatif olarak 10 sayısının kuvveti olarak yazılır. Virgül sola kaydırılırsa, kaydırma sayısı pozitif olarak 10 sayısının kuvveti olarak yazılırdı.)

Soru : **A)** $2{,}154 \cdot 10^{25}$ **sayısını virgülden kurtarınız.**

B) $0{,}000102 \cdot 10^{11}$ **sayısını virgülden kurtarınız.**

C) $0{,}04 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{32}$ **sayısını üslü ifade olarak yazınız.**

Kural 2 : **(Reel Sayının Negatif Tam Sayı Kuvveti)**

a , b ∈ ℝ (b ≠ 0) ve m ∈ ℤ için,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$$

olarak alınır. Yani sayının negatif kuvvetinde, tabanın çarpmaya göre tersi alınır ve kuvvet pozitife dönüştürülür.

Örnek : **A)** $(1/2)^{-5} = ?$

B) $(-3)^{-4} = ?$

C) $5^{6} \cdot (-1/5)^{-4} = ?$

Soru : $2^{-1} + (6/5)^{-1} = ?$

Soru : $(2/3)^{-4} + (1/4)^{2} = ?$

Soru : $\dfrac{3^{-1}+2^{-2}}{4^{-1}} = ?$

Kural 3 : **(Üslü İfadelerde Bölme İşlemi)**

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ olarak alınır. Yani bölme işleminde; üslü ifadelerin tabanları aynı ise, sonucu aynı tabanda üslerin farkı olarak alabiliriz.

Soru : $\dfrac{3^{11}}{3^{5}} \cdot 3^{27} = ?$

Soru : $\dfrac{5^{21}}{5^{10}} \cdot \dfrac{5^{9}}{5^{18}} = ?$

Soru : $\dfrac{3^{25} + 7 \cdot 3^{25} + 3^{25}}{3^{18}} = ?$ **(Aynı olan terimlerin kat sayısı toplanır ve kural uygulanır.)**

Soru : $\dfrac{4 \cdot 2^{15} + 2^{15} + 16 \cdot 2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}}{2^3 + 2^3 + 2^3} = ?$

Örnek : $\dfrac{3^{12} + 3^{13} + 3^{14}}{3^{7} + 3^{8} + 3^{9}} = ?$ **(Terimler aynı değilse aynı hale getirilir. Kuvvetlerdeki fazlalık ayrılır ve katsayılar toplanır sonra da kural uygulanır.)**

Soru : $\dfrac{5 \cdot 2^{22} + 3 \cdot 2^{24} + 2^{26}}{2^{10} + 2^{11} + 2^{13}} = ?$

Kural 4 : (Ortak Paranteze Alma)

A) $x , y \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$ olarak alınır.

B) $x , y \in \mathbb{R}$ $(y \neq 0)$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için $\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^m$ olarak alınır.

Yani üslü ifadelerin kuvvetleri aynı ise, ortak üs altında parantez içerisine tabanlar alınabilir.

Örnek : $(a / b)^3 \cdot (2b)^3 = ?$

Soru : $10^{6} \cdot (2 / 5)^{6} \cdot 3^{6} = ?$

Soru : $\dfrac{12^{a}}{0{,}3^{a}} = ?$

Soru : $(0,25)^2 \cdot \dfrac{1}{(0,005)^2} = ?$

Soru : $2^{12} \cdot 3^{13} = ?$ **(Fazlalığı ayır ve kuralı kullan.)**

Soru : $2^{10} \cdot 5^{9}$ **sayısının sonunda kaç sıfır vardır ?**

Soru : $2^{15} \cdot 5^{17}$ **sayısı için;**

A) Sayının sonunda kaç sıfır vardır ?

B) Sayı kaç basamaklıdır ?

Kural 5 : (Üslü İfadenin Kuvveti)

$x \in \mathbb{R}$ ve $m , n \in \mathbb{Z}$ için $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ olarak alınır. Yani üslü ifadenin kuvveti varsa taban aynı kalır ve kuvvetler çarpılır.

Örnek : 27^{14} ifadesini 3 'ün kuvveti olarak yazalım.

Soru : $8^6 . 16$ ifadesini 2 'nin kuvveti olarak yazınız.

Soru : $\dfrac{125^{12}}{25^{4}}$ **ifadesini 5 'in kuvveti olarak yazınız.**

Soru : $\dfrac{(a^{2} \cdot b^{3})^{5}}{(a^{3})^{3}} = ?$

Soru : $\dfrac{(x^3 \cdot y^4)^4}{(x^2 \cdot y^3)^5} = ?$

Üslü Denklemler

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olsun.

$x^m = x^n$ ise $m = n$ olarak alınır.

Yani eşitlikte tabanlar eşit ise kuvvetler de birbirine eşit olmalıdır.

Örnek : $2^{15 + 2x} = 32$ ise $x = ?$

Soru : $5^{3x - 11} = 625$ ise $x = ?$

Soru : $4^{x-2} = 32$ ise $x = ?$

Soru : $27^{3+x} = 81$ ise $x = ?$

Soru : $5^{x-6} = 25^{6-x}$ ise $x = ?$

Soru : $8^{3x+2} = 16^{2x+10}$ ise $x = ?$

Soru : $16^{x+1} = (0,5)^4$ ise $x = ?$

Soru : $(1/3)^{-x+5} = 81^{x-2}$ ise $x = ?$

Soru : $4^{x+1} \cdot 8^{x-5} = 16^{x+3}$ ise $x = ?$

Soru : $\dfrac{9^{x+4}}{3^{x-1}} = 27^{x-5}$ ise $x = ?$

Soru : $5^{x} - 5^{x+2} = -600$ ise $x = ?$ **(Üsleri ayır.)**

Soru : $3^{x+3} + 3^{x+1} = 810$ ise $x = ?$

Soru : $3^{2x+1} - 3^{2x} - 3^{2x-1} = 135$ ise $x = ?$

Kural 1 : (Kuvvetlerin Eşitliği)

$a , b \in \mathbb{R} - \{ -1 , 0 , 1 \}$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{ 0 \}$ olsun.

$$a^n = b^n$$

n çift ise

$a = b$ veya $a = -b$

n tek ise

$a = b$

olarak alınır.

Örneğin;

$x^2 = 2^2$ ise $x = 2$ veya $x = -2$ olabilir.

$x^3 = 4^3$ ise $x = 4$ olmalıdır.

Örnek : $(-5+2x)^2 = 81$ ise $x = ?$

Soru : $(-3x+15)^3 = 27$ ise $x = ?$

Soru : $(x/2-3)^4 = 16$ ise $x = ?$

Örnek : $(6x - 4)^{24} = (-26 + 4x)^{24}$ **ise** $x = ?$

Soru : $(2x-5)^{102} = (x+17)^{102}$ ise $x = ?$

Soru : $(-5x+4)^{37} = (x-86)^{37}$ ise $x = ?$

Kural 2 : (Sonucu 1 Olan Üslü İfadeler)

$a^n = 1$ ise;

1. İhtimal : $a = 1$ olabilir.

2. İhtimal : $a = -1$ ve n çift sayı olabilir.

3. İhtimal : $a \neq 0$ ve $n = 0$ olabilir.

*** Sorularda verilen, üç ihtimalden hangisine uyuyorsa ona göre çözüm üretilir.

Örnek : $(x - 3)^4 = 1$ ise $x = ?$

Soru : $(10 - 2x)^{102} = 1$ ise $x = ?$

Soru : $3^{2x - 14} = 1$ ise $x = ?$

Soru : $5^{6-x} = 1$ ve $3^{15+3y} = 1$ ise $x - y = ?$

Soru : $2^{x-y+3} = 1$ ve $7^{x+y-11} = 1$ ise $x.y = ?$

Soru : $5^{a-2b+1} = 11^{-a+b+7}$ ise $a + b = ?$

(Tabanlar eşitlenemiyorsa ancak kuvvetler 0 olma durumunda iki sonuç birbirine eşit olur.)

Örnek : $(2x-5)^{4x-8} = 1$ ise $x = ?$

Soru : $(x-3)^{2x+6} = 1$ ise $x = ?$

Kural 3:

$x^m = a^p$

$x^n = a^r$

} ise $\frac{m}{n} = \frac{p}{r}$ olarak alınır.

Örnek : $3^x = 8$ ve $2^y = 9$ ise $x \cdot y = ?$

Soru : $5^{x} = 8$ ve $625 = 2^{y}$ ise $x \cdot y = ?$

Soru : $9^{x} = 25$ ve $27 = 125^{y}$ ise $x \cdot y = ?$

Kural 4 : **$x , y \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}$ olsun.**

$x = y$ ise $x^m = y^m$ olarak alınabilir. Eşitliğin iki tarafının aynı kuvveti yine birbirine eşittir.

Örnek : **$x^{0,5} = \sqrt{8}$ ise $x = ?$**

Soru : $x^{0,6} = 27$ ise $x = ?$

Karışık Uygulamalar

Örnek : $2^x = m$, $3^x = n$ ise 72^x'in m ve n türünden sonucunu bulalım. (72 sayısı asal çarpanlarına ayrılır.)

Soru : **$2^x = m$, $5^x = n$ ise 400^x'in m ve n türünden sonucunu bulunuz.**

Soru : **$2^x = m$, $3^x = n$ ve $5^x = p$ ise 900^x'in m , n ve p türünden sonucunu bulunuz.**

Örnek : $3^{x} = a$ ise 3^{2x+1} ifadesini a türünden bulunuz.

(İstenende 3^{x} ifadesini elde edip, verileni yerine yazarız.)

Soru : $2^{x} = m$ ise $8^{x+2} = ?$

Soru : $5^{x-1} = k$ **ise** $25^{x+1} = ?$ **(İlkinden** 5^{x} **yalnız bırakılır. Bulduğumuzu ikincide yerine yazarız.)**

Soru : $3^{x+1} = m$ ise $27^{x+2} = ?$

Örnek : $2^{a-2} = 9$ **ise a sayısının bulunduğu çözüm aralığını bulalım. (9 sayısı 2 'nin hangi kuvvetleri arasında bulunuyorsa a – 2 sayısını bu kuvvetler arasında alıp çözümü gerçekleştiririz.)**

Soru : $3^{1+2x} = 43$ **ise x sayısının bulunduğu çözüm aralığını bulunuz.**

Soru : $3^{x-3} = 21$ ve $2^{y+1} = 55$ ise x ve y sayısını karşılaştırınız. **(Çözüm aralıkları karşılaştırılıp kimin büyük olduğuna karar verilir.)**

Kural : (Üslü Eşitsizlikler)

$a \in \mathbb{R}$ ve $m , n \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$ olmak üzere;

A) $0 < a < 1$ **olsun.** $a^m < a^n$ **ise** $m > n$ **olmalıdır.**

B) $a > 1$ **olsun.** $a^m < a^n$ **ise** $m < n$ **olmalıdır.**

Not : **Tabanlar aynı değilse öncelikle tabanlar eşitlenir.**

Örnek : $(2 / 3)^{2x - 1} < (2 / 3)^{x + 4}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $(5/4)^{x+2} < (5/4)^{3x-6}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $(8/3)^{x-11} < (3/8)^{-3x+5}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin; A) Çözüm kümesini bulunuz.,**

B) Çözüm kümesindeki negatif tam sayıların çarpımı ne olur ?

Soru : $(9/25)^{3+x} < (3/5)^{4x-9}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.**

Soru : $(16/9)^{-2x+7} < (27/64)^{5x-1}$ **eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin çözüm kümesini bulunuz.**

Not : **T = Tek sayı , Ç = Çift sayı olmak üzere;**

$(-)^{Ç} = +$, $(-)^{T} = -$, $(+)^{Ç} = +$, $(+)^{T} = +$ işaretlidir.

$(+).(+) = +$, $(-).(-) = +$, $(+).(-) = -$ işaretli idi.

Örnek : **$x , y , z \in \mathbb{R}$'dir. $x^2 . y < 0$, $y . z > 0$, $x . z < 0$ ise x , y , z'nin işaret kontrolünü yapalım. (Verilenlere göre terimlerin işaretine karar verilir.)**

$x^2 . y < 0$ $\qquad$ $y . z > 0$ $\qquad$ $x . z < 0$

Soru : $x , y , z \in \mathbb{R}$ **'dir.** $x^3 . y < 0$, $x^2 . y^4 . z < 0$,

$z^2 . y^3 < 0$ **ise** x , y , z **'nin işaret kontrolünü yapınız.**

$x^3 . y < 0$ $\qquad$ $x^2 . y^4 . z < 0$ $\qquad$ $z^2 . y^3 < 0$

Soru : **a , b , c ∈ ℝ 'dir. $a \cdot b^2 \cdot c < 0$, $b^4 \cdot a > 0$, $c \cdot b^3 > 0$ ise a , b , c 'nin işaret kontrolünü yapalım.**

$a \cdot b^2 \cdot c < 0$ $\quad$ $b^4 \cdot a > 0$ $\quad$ $c \cdot b^3 > 0$